

2024 秋季初三数学每日一题打卡 011

011 试题来源：2023 秋苏州工业园区校级期中第 27 题

定义：若一个函数图象中存在横、纵坐标相等的点，则称该点为这个函数图象的“等值点”，例如：点 $(1,1)$ 是函数 $y=2x-1$ 的图象的“等值点”。

(1) 分别判断函数 $y=2x+1$, $y=x^2-x+2$ 的图象上是否存在“等值点”？如果存在，求出“等值点”的坐标；如果不存在，请说明理由；

(2) 设函数 $y=\frac{9}{x}(x>0)$, $y=-x+b(x>0)$ 的图象的“等值点”分别为点 A 、 B ，过点 B 作 $BC\perp x$ 轴，垂足为 C ，当 $\triangle ABC$ 面积为 3 时，求 b 的值；

(3) 若函数 $y=x^2-4(x\geq m)$ 的图象记为 W_1 ，将其沿直线 $x=m$ 翻折后的图象记为 W_2 ，当 W_1 与 W_2 组合成的图象上恰有两个“等值点”时，请求出 m 的取值范围。

试题解析

(1) 分别判断函数 $y = 2x + 1$, $y = x^2 - x + 2$ 的图象上是否存在“等值点”? 如果存在, 求出“等值点”的坐标; 如果不存在, 请说明理由;

(1) 在 $y = 2x + 1$ 中, 令 $x = 2x + 1$, 得 $x = -1$, \therefore 函数 $y = 2x + 1$ 的图象上存在“等值点”为 $(-1, -1)$;

在 $y = x^2 - x + 2$ 中, 令 $x = x^2 - x + 2$, 此时 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$, 方程无解,

\therefore 函数 $y = x^2 - x + 2$ 的图象上不存在个“等值点”;

(2) 设函数 $y = \frac{9}{x} (x > 0)$, $y = -x + b (x > 0)$ 的图象的“等值点”分别为点 A 、 B , 过点 B 作 $BC \perp x$ 轴, 垂足为 C , 当 $\triangle ABC$ 面积为 3 时, 求 b 的值;

(2) 先根据“等值点”的定义求出函数的图象上“等值点” $A(3, 3)$, 同理求出 $B(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b)$, 根据 $\triangle ABC$ 的面积为 3 可得 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}|b| \times |3 - \frac{1}{2}b| = 3$, 求解即可;

(2) 在函数 $y = \frac{9}{x} (x > 0)$ 中, 令 $x = \frac{9}{x}$, 解得: $x = 3$, $\therefore A(3, 3)$,

在函数 $y = -x + b$ 中, 令 $x = -x + b$, 解得: $x = \frac{1}{2}b$, $\therefore B(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b)$,

$\because BC \perp x$ 轴, $\therefore C(\frac{1}{2}b, 0)$, $\therefore BC = \frac{1}{2}b$, $\because \triangle ABC$ 的面积为 3, $\therefore \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}|b| \times |3 - \frac{1}{2}b| = 3$,

当 $b < 0$ 时, $b^2 - 6b - 24 = 0$, 解得 $b = 3 - \sqrt{33}$,

当 $0 \leq b < 6$ 时, $b^2 - 6b + 24 = 0$,

$\because \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 24 = -60 < 0$, \therefore 方程 $b^2 - 6b + 24 = 0$ 没有实数根,

当 $b \geq 6$ 时, $b^2 - 6b - 24 = 0$, 解得: $b = 3 + \sqrt{33}$, 综上所述, b 的值为 $3 + \sqrt{33}$ 或 $3 - \sqrt{33}$;

(3) 若函数 $y = x^2 - 4 (x \geq m)$ 的图象记为 W_1 , 将其沿直线 $x = m$ 翻折后的图象记为 W_2 , 当 W_1 与 W_2 组合成的图象上恰有两个“等值点”时, 请求出 m 的取值范围.

(3) 先求出函数 $y = x^2 - 4$ 的图象上有两个“等值点”, 再利用翻折的性质分类讨论即可.

解: (3) 令 $x = x^2 - 4$, 解得: $x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$ 或 $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$,

\therefore 函数 $y = x^2 - 4$ 的图象上有两个“等值点” $(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2})$, $(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2})$,

① 当 $m < \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$ 时, W_1, W_2 两部分组成的图象上必有 2 个“等值点” $(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2})$, $(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2})$,

将函数 $y = x^2 - 4 (x \geq m)$ 的图象沿直线 $x = m$ 翻折后为: $y = (x - 2m)^2 - 4 (x < m)$,

令 $x = (x - 2m)^2 - 4$, 整理得: $x^2 - (4m + 1)x + 4m^2 - 4 = 0$,

$\because W_2$ 的图象上不存在“等值点”, $\therefore \Delta < 0$, $\therefore (4m + 1)^2 - 4(4m^2 - 4) < 0$, $\therefore m < -\frac{17}{8}$;

② 当 $m = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$ 时, 有 3 个“等值点” $(-\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{17}}{2})$, $(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2})$, $(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2})$;

③ 当 $\frac{1 - \sqrt{17}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ 时, W_1, W_2 两部分组成的图象上恰有 2 个“等值点”;

④ 当 $m = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ 时, W_1, W_2 两部分组成的图象上恰有 1 个“等值点” $(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2})$;

⑤ 当 $m > \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ 时, W_1, W_2 两部分组成的图象上没有“等值点”,

综上所述, 当 W_1, W_2 两部分组成的图象上恰有 2 个“等值点”时, $m < -\frac{17}{8}$ 或 $\frac{1 - \sqrt{17}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.